Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$F_A\left((x_j)_j + (y_j)_j\right) = F_A\left((x_j + y_j)_j\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j)\right)_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right)_i$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)_i + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right)_i$$

$\lambda \in K$

$$= F_A\left((x_j)_j\right) + F_A\left((y_j)_j\right)$$

$$F_A\left(\lambda \cdot (x_j)_j\right) = \ldots = \lambda \cdot F_A\left((x_j)_j\right)$$

analog. $\square$

Beweis: Sei V K-VR, $\dim_K V = n$.
Hauptsatz, Teil I aus Vorlesung 13:
$\exists$ Basis $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ von V.

Def.: $F: K^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underline{b}_i$$

F ist K-linear [...] und sendet eine Basis von K^n auf eine Basis von V:

$$\underline{e}_j = \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \underline{b}_j$$

Also ist F ein Isomorphismus (Vorlesung 14).

Sei $K^n \xrightarrow{F} K^m$ K-linear.
Betrachte Standardbasen
$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von K^n
$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ von K^m

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i = (a_{ij})_i$$

für gewisse eindeutige $a_{ij} \in K$

Beh: $F = F_A$ für $A = (a_{ij})$.

$$F(\underline{x}) = F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\, F(e_j)$$

F linear

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) e_i$$

$$= \boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)_i}$$

$$= A \cdot \underline{x}$$

$\square$

Finde Matrixdarstellung zu

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{Rotation um } 90^\circ]{} \mathbb{R}^2$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mapsto \quad \uparrow \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \uparrow \quad \mapsto \quad \leftarrow \quad = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Es ist sogar $Abb(V, W)$ ein K-VR mit $+, \cdot$ definiert wie links [...].

$Hom_K(V, W) \subset Abb(V, W)$ UVR:

$0 =$ Nullabbildung ist linear

F, G linear $\Rightarrow F + G$ linear

[...]

F linear, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot F$ linear

[...] $\square$

Beweis:

K-VR [...] ✓

Eine Basis von $M(m \times n; K)$ ist gegeben durch die Matrizen

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & \cdots & \\ & \vdots & & \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & j & & \end{array} & \end{array}$$

$$(E_{11}, E_{12}, E_{13}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, \ldots E_{mn}) \quad \square$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$-2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-14&0\end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u>

bijektiv laut Hauptsatz

K-linear: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$$\begin{aligned}
F_{A+B}(\underline{x}) &= (A+B)\cdot\underline{x} \\
&= \Big(\sum_j (a_{ij}+b_{ij})\cdot x_j\Big)_i \\
&= \Big(\sum_j a_{ij}x_j + \sum_j b_{ij}x_j\Big)_i \\
&= \Big(\sum_j a_{ij}x_j\Big)_i + \Big(\sum_j b_{ij}x_j\Big)_i \\
&= F_A(\underline{x}) + F_B(\underline{x}) \\
&= (F_A + F_B)(\underline{x}) \quad ✓
\end{aligned}$$

$F_{\lambda\cdot A}(\underline{x}) = (\lambda\cdot F_A)(\underline{x})$ analog $\square$

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$F_{A\cdot B}\left((x_k)_k\right) = \left(\sum_k (A\cdot B)_{i,k} \cdot x_k\right)_i$$

$$= \left(\sum_k \sum_j a_{ij} b_{jk} x_k\right)_i$$

$$= \left(\sum_k a_{ij} \cdot \sum_j b_{jk} x_k\right)_i$$

$$= \left(\sum_k a_{ij} \; F_B(\underline{x})_j\right)_i$$

$$= F_A\left(F_B(\underline{x})\right)$$

$$= (F_A \circ F_B)(\underline{x})$$

$$F_{E_n} = \mathrm{id}_{K^n} \qquad [\ldots]$$

$\square$

Beweis:

Allgemeiner ist $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ Ring mit Eins ($= \mathrm{id}_V$) für jeden K-VR V. Z.B.:

- $\circ$ assoziativ ✓
- usw.

Wir wissen bereits $A \mapsto F_A$ ist bijektiv und mit beiden Verknüpfungen verträglich. Daraus folgt:

$$M(n \times n; K)$$

ist auch ein Ring (und $A \mapsto F_A$ ist Isomorphismus von Ringen).

(z.B.: $\cdot$ assoziativ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) ✓$$

denn $F_{(A\cdot B)\cdot C} = F_{A\cdot B} \circ F_C$

$$= (F_A \circ F_B) \circ F_C$$

$$= F_A \circ (F_B \circ F_C)$$

$$= \ldots = F_{A\cdot(B\cdot C)}.$$

Wegen Bijektivität folgt:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \checkmark$$

usw. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\#$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$